

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي
الشعبة: علوم تجريبية



دورة: **2021**

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة: **03** سا و**30** د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

يُراد تشكيل بطريقة عشوائية لجنة تتكون من عضوين من بين ثلاثة رجال H_1 ، H_2 و H_3 و امرأتان F_1 و F_2.

نعتبر الحوادث A ، B و C حيث: A " عضوا اللجنة من نفس الجنس ".

B " عضوا اللجنة من جنسين مختلفين ".

C " H_1 عضو في اللجنة ".

1) أ. احسب $p(A)$ ، $p(B)$ احتمال A و B على الترتيب.

ب. بيّن أنّ $p(C)$ احتمال الحدث C يساوي $\frac{2}{5}$.

2) المتغير العشوائي X يرفق بكلّ إمكانية اختيار لعضوين عدد الرّجال في اللّجنة.

أ. برّر أنّ مجموعة قيم X هي $\{0\,;1\,;2\}$.

ب. عيّن قانون احتمال المتغير العشوائي X و احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

أجب بصح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية:

1) الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x+\frac{2}{e^x+1}$

من أجل كلّ عدد حقيقي x لدينا: $f(x)+f(-x)=2$

2) (u_n) متتالية هندسية معرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول 2 وأساسها $\frac{1}{3}$ ، نضع: $S_n=u_0+u_1+\dots+u_n$

من أجل كل عدد طبيعي n عبارة S_n هي: $3-\frac{1}{3^{n+1}}$

3) الدّالة العددية g المعرّفة على $[0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x+\ln(e^x+1)$

تمثيلها البياني (C) في المستوي المنسوب إلى معلم يقبل مستقيما مقاربا مائلا $y=2x$ معادلة له.

4) الدّالة العددية h المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=e^{3x}+\frac{1}{3}$ هي حلّ للمعادلة التفاضلية $y'-3y=1$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = -4n+3$

1) بيّن أنّ المتتالية (u_n) حسابية يُطلب تعيين أساسها r وحدّها الأول u_0.

2) من أجل كلّ عدد طبيعي n نضع: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

أ. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $S_n = -2n^2 + n + 3$

ب. عيّن قيمة العدد الطبيعي n حيث: $S_n = -30132$

3) المتتالية العددية (v_n) حدودها موجبة تماما و من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_n = \ln(v_n)$

أ. اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

ب. بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها e^{-4}.

4) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S'_n = \ln[v_0(1-\frac{1}{2})] + \ln[v_1(1-\frac{1}{3})] + \cdots + \ln[v_n(1-\frac{1}{n+2})]$

احسب S'_n بدلالة n.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) الدّالة العددية g معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x - 2$

1) بيّن أنّ الدّالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2) **أ.** بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α يُحقِّق: $0,7 < \alpha < 0,8$

ب. استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II) الدّالة العددية f معرّفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = 2x - 1 + \ln\left(1 + \frac{1-x}{x^2}\right)$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1) **أ.** بيّن أنّ: $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ ثم فسِّر النتيجة هندسيا.

ب. احسب $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

2) **أ.** بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي غير معدوم x: $f'(x) = \frac{g(x)}{x(x^2 - x + 1)}$

ب. استنتج أنّ f متزايدة تماما على كلّ من $]-\infty;0[$ و $[\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]0;\alpha]$.

جـ. شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

3) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x - 1$ مقارب مائل لـ(C) ثمّ ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ)

4) بيّن أنّ (C) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) في النّقطة A ذات الفاصلة 2 ثمّ اكتب معادلة له.

5) بيّن أنّ (C) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β تُحقِّق: $-0,5 < \beta < -0,4$

6) ارسم (Δ)، (T) و المنحنى (C). (نأخذ: $f(\alpha) \approx 0,87$).

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

صندوق به 9 بطاقات متماثلة لا نفرّق بينها باللمس، مكتوب على كلّ منها سؤال واحد، منها ثلاثة أسئلة في الهندسة مرقمة بـ: 1، 2 و 3، أربعة أسئلة في الجبر مرقمة بـ: 1، 2، 3 و 4 وسؤالين في التحليل مرقمين بـ: 1 و 2

نسحب عشوائيا بطاقة واحدة من الصندوق ونعتبر الحوادث التالية:

A "سحب سؤال في الهندسة "، B "سحب سؤال في التحليل " و C "سحب سؤال في الجبر يحمل رقما زوجيا".

1) احسب $p(A)$ ، $p(B)$ و $P(C)$ احتمال الحوادث A ، B و C على الترتيب.

2) احسب احتمال سحب سؤال رقمه مختلف عن 1.

3) المتغيّر العشوائي X يرفق بكلّ بطاقة مسحوبة رقم السؤال المسجل عليها.

أ. برّر أنّ مجموعة قيم X هي $\{1;2;3;4\}$.

ب. عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X ثمّ احسب $E(X)$ أمله الرّياضياتي.

جـ. استنتج قيمة $E(2021X+1442)$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

لكلّ سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، عيّنه مع التعليل.

1) لتكن (u_n) متتالية حسابية معرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول 1 و أساسها 2

نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n : $P_n = e^{u_0} \times e^{u_1} \times \cdots \times e^{u_n}$. عبارة P_n هـي:

أ) $e^{n(n+1)}$ **ب)** $e^{(n+1)^2}$ **جـ)** $e^{-n(n+1)}$

2) الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \ln(x^2+2x+3)$. من أجل كلّ عدد حقيقي x لدينا:

أ) $f(-2-x) = f(x)$ **ب)** $f(2-x) = f(x)$ **جـ)** $f(-x) = f(x)$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(x+1)-\ln(x+2)\right]$ تساوي:

أ) 1 **ب)** $+\infty$ **جـ)** 0

4) (w_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ حدودها موجبة تماما وأساسها عدد حقيقي q موجب تماما و يختلف عن 1

نضع: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $v_n = \ln w_n$

(v_n) هـي متتالية :

أ) هندسية.   **ب)** حسابية.   **جـ)** لا حسابية و لا هندسية.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدّها الأوّل u_0 حيث: $u_0 = 0$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3}{8}(u_n+5)$

1) برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_n < 3$

2) بيّن أنّ (u_n) متزايدة تماما ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

3) المتتالية العددية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 3(3-u_n)$

أ. احسب v_0 ثمّ بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{8}$.

ب. اكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n ثمّ استنتج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_n = 3-3\left(\frac{3}{8}\right)^n$.

جـ. احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n: $P_n = (3-u_0)\times(3-u_1)\times\cdots\times(3-u_n)$

احسب P_n بدلالة n.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(C_g)

I) الدّالة العددية g معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 + xe^{-x-1}$، (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ (الشكل المقابل)

1) احسب $g(-1)$.

2) بقراءة بيانية، حدّد حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II) الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x-(x+1)e^{-x-1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1) تَحقّق أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x غير معدوم: $f(x) = x[1-(1+\frac{1}{x})e^{-x-1}]$

ثمّ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x: $f'(x) = g(x)$

ب. استنتج أنّ الدالة f متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]-\infty;-1]$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ ثمّ فسّر النّتيجة هندسيا.

ب. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$

جـ. بيّن أنّ (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) يُطلب كتابة معادلة له.

4) أ. بيّن أنّ (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β

حيث: $0,3<\alpha<0,4$ و $-1,9<\beta<-1,8$

ب. ارسم المستقيمين (Δ) و (T) ثمّ ارسم المنحنى (C_f) على المجال $]-2;+\infty[$.

5) الدّالة العددية h معرّفة على المجال $[-2;2]$ بـ: $h(x) = -|x| + (|x|-1)e^{|x|-1}$

(C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ. بيّن أنّ الدّالة h زوجية.

ب. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $[-2;0]$: $h(x) = f(x)$

جـ. اشرح كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) ثمّ ارسمه.

انتهى الموضوع الثاني

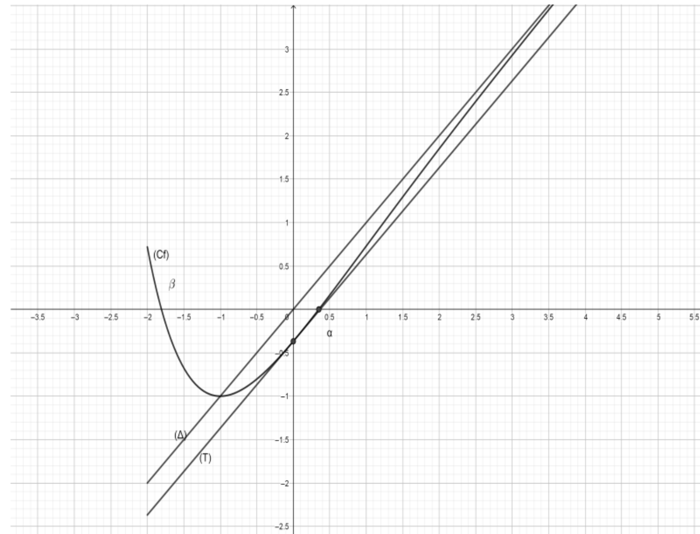
عناصر الإجابة (الموضوع الأوّل)	العلامة مجزأة	العلامة مجموعة
التمرين الأول: (04 نقاط)		
1) ا. حساب $p(A)$ ، $p(B)$: $p(B)=\frac{3}{5}$ ، $p(A)=\frac{2}{5}$	0.75+0.75	02.00
ب. تبيان أنّ $p(C)$ احتمال الحدث C يساوي $\frac{2}{5}$ (يمكن استعمال شجرة الامكانيات أو الجدول)	0.50	
2) أ. تبرير أنّ مجموعة قيم X هي $\{0;1;2\}$	0.75	02.00
ب. تعيين قانون احتمال المتغير العشوائي X x_i : 0 ، 1 ، 2 $p(X=x_i)$: 0.1 ، 0.6 ، 0.3	0.75	
حساب أمله الرياضياتي $E(X)$: $E(X)=1.2$	0.50	
التمرين الثاني: (04 نقاط)		
1.صح ، التبرير	0,50 x 2	01.00
2.خطأ ، التبرير	0,50 x 2	01.00
3.صح ، التبرير	0,50 x 2	01.00
4.خطأ ، التبرير	0,50 x 2	01.00
التمرين الثالث: (05 نقاط)		
1. تبيان أنّ المتتالية (u_n) حسابية: $r=-4$ و $u_0=3$	0,25x2+0,50	01.00
2. أ. تبيان أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $S_n=-2n^2+n+3$ **ب.** تعيين قيمة العدد الطبيعي n حيث: $S_n=-30132$: $n=123$	01 01	02.00
3. أ. كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n : $v_n=e^{-4n+3}$ **ب.** تبيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها e^{-4}	0.75 0.75	01.5
4. $S'_n=-2n^2+n+3-\ln(n+2)$	0.50	00.50

<table>
<tr><th colspan="3">التمرين الرابع: (07 نقاط)</th></tr>
<tr><td>0.50</td><td>0.25
0.25</td><td>ا. 1. تبيان أنّ الدّالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$: $g'(x)=6x^2-4x+3$
من أجل كلّ عدد حقيقي x : $g'(x)>0$</td></tr>
<tr><td>01.00</td><td>0.50
0.50</td><td>2. أ. تبيان أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α يُحقِّق: $0,7<\alpha<0,8$
g مستمرة و متزايدة تماما و $g(0.7)=-0.194$ و $g(0.8)=0.144$
ب. إشارة $g(x)$: $g(x)>0$ على $]\alpha;+\infty[$ و $g(x)<0$ على $]-\infty;\alpha[$ ، $g(\alpha)=0$</td></tr>
<tr><td>01.25</td><td>0.50
0.25
2x0.25</td><td>II) 1. أ. تبيان أنّ: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$
$x=0$ معادلة مستقيم مقارب للمنحني
ب. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$</td></tr>
<tr><td>01.50</td><td>0.50
0.50
0.25
0.25</td><td>2. أ. تبيان أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي غير معدوم x : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x(x^2-x+1)}$
ب. إشارة $f'(x)$: $f'(x)>0$ على $]-\infty;0[$ و $]\alpha;+\infty[$ و $f'(x)<0$ على $]0;\alpha[$
$f'(x)=0$ لمّا $x=\alpha$
f متزايدة تماما على كلّ من $]-\infty;0[$ و $[\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]0;\alpha]$
جـ. جدول تغيّرات الدّالة f
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$ 0</td><td>0 α $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>$+$</td><td>$-$ 0 $+$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$-\infty$ ↗ $+\infty$</td><td>$+\infty$ ↘ $f(\alpha)$ ↗ $+\infty$</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>01.00</td><td>0.50
0.50</td><td>3. تبيان أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=2x-1$ مقارب مائل لـ(C)
وضعية (C) بالنّسبة إلى (Δ): (C) فوق (Δ) على $]-\infty;0[$ و $]0;1[$
(C) تحت (Δ) على $]1;+\infty[$
(C) يقطع (Δ) عند $A(1;1)$</td></tr>
<tr><td>0.50</td><td>0.25
0.25</td><td>4. تبيان أنّ (C) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ)
معادلة (T) : $y=2x-1+\ln(\frac{3}{4})$</td></tr>
<tr><td>0.50</td><td>0.50</td><td>5. تبيان أنّ (C) يقطع حامل محور الفواصل
f مستمرة و متزايدة تماما و $f(-0.4)=0.4773$ و $f(-0.5)=-0.54$</td></tr>
</table>

0.75	**0.25+0.25**	6. رسم (Δ)، (T)
	0.25	المنحنى (C).

عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)	العلامة مجزأة	العلامة مجموعة
التمرين الأول: (04 نقاط)		
1. حساب $p(A)$ ، $p(B)$ و $p(C)$ $p(C)=\frac{2}{9}$ ، $p(B)=\frac{2}{9}$ ، $p(A)=\frac{1}{3}$	0.50x3	01.50
2. احتمال سحب سؤال رقمه مختلف عن 1 هو : $\frac{2}{3}$	0.50	00.50
3. أ. تبرير أنّ مجموعة قيم X هي $\{1;2;3;4\}$ **ب.** تعيين قانون احتمال X : x_i: 1، 2، 3، 4 ؛ $P(X=x_i)$: $\frac{3}{9}$، $\frac{3}{9}$، $\frac{2}{9}$، $\frac{1}{9}$ حساب $E(X)$: $E(X)=\frac{19}{9}$. **جـ.** استنتاج : $E(2021X+1442)=2021E(X)+1442=5708.55$	0.50 0.25x4 0.25 0.25	02.00
التمرين الثاني: (04 نقاط)		
1. الجواب الصحيح هو **ب)** ، التبرير	0.50x2	04.00
2. الجواب الصحيح هو أ) ، التبرير	0.50x2	
3. الجواب الصحيح هو **جـ)** ، التبرير	0.50x2	
4. الجواب الصحيح هو **ب)** ، التبرير	0.50x2	
التمرين الثالث: (05 نقاط)		
1. البرهان بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_n<3$	0.5+0.25	0.75
2. تبيان أنّ (u_n) متزايدة تماما : $u_{n+1}-u_n=-\frac{5}{8}(u_n-3)$ استنتاج أنّها متقاربة	0.25+0.50 0.50	01.25
3. أ. $v_0=9$ تبيين أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{8}$: $v_{n+1}=v_n\times\frac{3}{8}$ **ب.** عبارة الحد العام v_n : $V_n=9\left(\frac{3}{8}\right)^n$ استنتاج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_n=3-3\left(\frac{3}{8}\right)^n$ **جـ.** $\lim_{n\to+\infty}u_n=3$	0.25 0.75 0.50 0.75 0.25	02.50
4. $P_n=3^{n+1}\times\left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$	0.50	00.50

عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)	العلامة مجزأة	العلامة مجموعة
التمرين الرابع: (07 نقاط)		
I) .1 $g(-1)=0$	0.25	0.25
2.اشارة $g(x)$: لما $x\in]-\infty;-1[$ فان $g(x)<0$. لما $x\in]-1;+\infty[$ فان $g(x)>0$. $g(-1)=0$	0.50	0.50
II) 1.التحقق: $f(x)=x[1-(1+\frac{1}{x})e^{-x-1}]$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	0.25 0.25x2	0.75
2. أ. تبيان أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x : $f'(x)=g(x)$ ب. f متزايدة تماما على $[-1;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]-\infty;-1]$ جدول تغيّراتها: x: $-\infty$ ، -1 ، $+\infty$ ؛ $f'(x)$: $-$ ، 0 ، $+$ ؛ $f(x)$: $+\infty$ ↘ -1 ↗ $+\infty$	0. 25 0. 25 0.50	01.00
3. أ- $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$ المستقيم ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ(C_f) **ب.** وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ): لما $x\in]-\infty;-1[$ فان (C_f) يقع فوق (Δ). لما $x\in]-1;+\infty[$ فان (C_f) يقع تحت (Δ). (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(-1;-1)$ **جـ.** تبيان أنّ (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) $f'(x)=1$ $f'(x)=1$ تكافئ $x=-1$ كتابة معادلة (T): $y=x-e^{-1}$	0.25 0.25 0. 5 0,25 0,25 0,25	01.75

<table>
<tr><th colspan="2">العلامة</th><th rowspan="2">عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)</th></tr>
<tr><th>مجموعة</th><th>مجزأة</th></tr>
<tr><td>01.50</td><td>0.25
0.25
0.25x2
0.50</td><td>4. أ . تبيان أن $\left(C_f\right)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين
f مستمرة و متناقصة تماما و $f(-1.9)=0.3136$ و $f(-1.8)=-0.01956$
f مستمرة و متزايدة تماما و $f(0.3)=-0.054$ و $f(0.4)=0.05476$
ب. رسم (Δ) و (T)
رسم $\left(C_f\right)$

</td></tr>
<tr><td>01.25</td><td>0. 25
0. 25
0.25
0.50</td><td>5. أ. تبيان أن الدّالة h زوجية
ب. تبيان أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من $[-2;0]$: $h(x)=f(x)$
جـ. شرح كيفية رسم $\left(C_h\right)$ انطلاقا من $\left(C_f\right)$
رسم $\left(C_h\right)$</td></tr>
</table>